MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică
"Vrănceanu – Procopiu"
Ediția a XVI –a, 2014

X

Problema I (10 puncte)

O foaie triunghiulară de tablă este omogenă şi are masa de 900 grame. Tăiem acestă foaie după o dreaptă care trece prin centrul de greutate al triunghiului. Demonstrați că fiecare dintre bucățile de tablă care se obțin cântăreşte cel puțin 400 grame.

***

Soluție.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC şi MN dreapta de-a lungul căreia se face tăietura, unde $M \in [AB]$, $N \in [AC]$. Notăm $x = \frac{MB}{MA}, y = \frac{NC}{NA}$. Se arată (folosind teorema lui Menelaus sau teorema transversalei) că $x + y = 1$. **(3p)**

Avem că $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{1}{(1+x)(1+y)} = \frac{1}{2+xy}$. **(3p)**

Cum $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, rezultă că $0 \le xy \le \frac{1}{4}$. Astfel, $\frac{4}{9} \le \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} \le \frac{1}{2}$ şi, de aici, cerința problemei este imediată. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $[a,b]$ un interval ($a \neq b$) astfel încât există o funcție $f:[a,b] \to [-1,1]$ cu proprietatea că

$$f(f(x)) = \frac{2x+1}{x+2}, \forall x \in [a,b].$$

a) Arătați că $a = -1$ şi $b = 1$.

b) Demonstrați că $f(-1) + f(1) = 0$.

c) Dați exemplu de funcție având proprietatea din enunț.

Romeo Ilie

Soluție.

a) Pentru a se putea calcula $f(f(x))$ pentru orice $x \in [a,b]$, se impun condițiile $\text{Im} f \subseteq [a,b]$ şi $f(f(x)) \in [-1,1], \forall x \in [a,b]$. Se arată că funcția f este surjectivă, deci $\text{Im} f = [-1,1] \subseteq [a,b]$. Apoi, $-1 \le f(f(a)) \le 1$, deci $-1 \le \frac{2a+1}{a+2} \le 1$, de unde $a \in [-1,1]$. Obținem că $a = -1$ şi analog se arată că $b = 1$. **(3p)**

b) Din $(f\circ f)(f(x))=f((f\circ f)(x))$ deducem că $\frac{2f(x)+1}{f(x)+2}=f\left(\frac{2x+1}{x+2}\right),\forall x\in[-1,1]$. Pentru $x=1$ rezultă că $\frac{2f(1)+1}{f(1)+2}=f(1)$, de unde $f^2(1)=1$, deci $f(1)\in\{-1,1\}$. Pentru $x=-1$ rezultă, analog, că $f(-1)\in\{-1,1\}$. Nu putem avea $f(1)=f(-1)$: presupunând contrariul, am obține că $f(f(1))=f(f(-1))$, adică $1=-1$, fals. Rămâne că $f(1)=-f(-1)$, de unde concluzia. **(3p)**

c) De exemplu, funcția $f:[-1,1]\to[-1,1], f(x)=\frac{mx+n}{px+q}$, unde $m=q=\sqrt{3}+1$ şi $n=p=\sqrt{3}-1$, are proprietățile dorite. **(3p)**